TÉCNICAS DE CONTEO

Las **Técnicas de conteo** son utilizadas en Probabilidad y Estadística para determinar el número total de resultados. En este capítulo analizamos: Regla de factoriales, Principio de multiplicación, Principio aditivo, Permutaciones (simples, permutaciones circulares y con elementos repetidos), Variaciones y Combinaciones.

1. Principio Multiplicativo:

- Si un suceso ocurre de n1 maneras diferentes, el segundo suceso de n2 maneras diferentes y así sucesivamente hasta la última alternativa que puede realizarse de nk maneras, entonces el número total de maneras en que ocurre el suceso definido está dado por n1· n2 ·n3 ·…· nk
- Ejemplo 1: Si tengo tres camisas, cinco pantalones y cuatro corbatas. ¿De cuántas maneras distintas puedo combinar una camisa, un pantalón y una corbata?

$\underline{3} \times \underline{5} \times \underline{4} = 60$

2. Principio Aditivo:

- Si un suceso tiene formas alternativas de llevarse a cabo, donde la primera de esas alternativas puede realizarse de m1 maneras, la segunda alternativa puede realizarse de m2 maneras, y así sucesivamente, hasta la última que puede realizarse de mk maneras, entonces el número total de maneras en que ocurre este suceso es m1 + m2 + m3 + …+ mk
- Ejemplo: Si me quiero comprar un automóvil, puedo elegir entre distintas marcas y modelos. La marca A tiene 2 modelos y 3 colores, la marca B tiene 4 modelos y 5 colores disponibles. ¿De cuántas maneras posibles puedo elegir un automóvil?

$A = 2 \cdot 3 = 6$

$B = 4 \cdot 5 = 20$

$20 + 6 = 26$

EJEMPLOS

- 1. Cuantos números telefónicos de siete dígitos considerando que el cero no puede ir al inicio y no es posible repetir?

$\boxed{9}\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4} = 544.320$

- 2. Cuántos de los núemros telefónicos anteriores empiezan por el numero 7?

$\underset{7}{\underline{1}} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} = 60480$

- 3. Cuantos números telefónicos de los anteriores terminan en número impar? 7

impar = 5

$\underline{1} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{4} = 26880$

- **4.** ¿Cuántas placas patentes de automóvil se pueden hacer utilizando cuatro letras diferentes seguidas de dos dígitos diferentes? No se admiten repeticiones. (Se disponen de 26 letras).

Sin repetir

$$\underset{L}{\underline{26}} \cdot \underset{L}{\underline{25}} \cdot \underset{L}{\underline{24}} \cdot \underset{L}{\underline{23}} \cdot \underset{D}{\underline{10}} \cdot \underset{D}{\underline{9}} = 32\,292\,000$$

Repet

$$\underline{26} \cdot \underline{26} \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 45697600$$

- 5. Se tienen seis libros diferentes, uno de aritmética, dos de biología, y tres de calculo. De cuantas maneras se pueden organizar en eun estante?

$$\underset{A}{\underline{1}} \cdot \underset{B}{\underline{2}} \cdot \underset{D}{\underline{1}} \cdot \underset{C}{\underline{3}} \cdot \underset{C}{\underline{2}} \cdot \underset{C}{\underline{1}} = \underline{12}$$

FACTORILES

El factorial de un número entero positivo n se define como el producto que se obtiene de multiplicar los números naturales desde el 1 hasta el número n.

- Definición: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$
- Notación: $n!$
- Lectura: $n!$ se lee "n factorial" o "factorial de n"
- Por definición: $\underbrace{0! = 1}$

TIPS

El factorial de n ($n!$) es el producto de los primeros n números naturales. Además, $0! = 1$

1. $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 7 \cdot 6 = 42$

2. $\dfrac{15!}{(12-2)!\,3!} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!} \cdot 3!} = \dfrac{\cancel{15}\,5 \cdot \cancel{14} \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$

$= \dfrac{5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1} =$

$= 60.060$

3. $\dfrac{5+4+3!}{2!+3!} = \dfrac{9+3!}{2!+3!} = \dfrac{9+3.2.1}{2.1+3.2.1} = \dfrac{9+6}{2+6} = \dfrac{15}{8}$

4. $\dfrac{7!+6!-8!}{5!-3!} = \dfrac{7.6!+6!-\underbrace{8.7}.6!}{\underbrace{5.4}_{20}.3!-\underset{1}{3!}} = \dfrac{6!.(7+1-56)}{3!.(20-1)}$

$= \dfrac{6!.(-48)}{3!.(19)}$

$= \dfrac{6.5.4.\cancel{3!}(-48)}{\cancel{3!}(19)}$

$\dfrac{120(-48)}{19}$

$= -\dfrac{5760}{19}$

3. PERMUTACIONES

- Una permutación es cuando utilizamos todos los elementos del conjunto y los *ordenamos* de distintas formas.

A) **Permutación simple:** El número de **permutaciones** de **n** elementos está dado por: $P(n) = n!$

- Ejemplo 1: ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra GENIAL?
- (dejar 2 renglones)
- Ejemplo 2: Una familia tiene 3 niños y 2 niñas.
- dejar 2 renglones)

B) **Permutación Circular:** El número de permutaciones circulares de n elementos está dado por:
$P_o(n) = (n - 1)!$

- Ejemplo 1: ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa redonda?

(dejar 2 renglones)

C) **Permutación con elementos repetidos**: El número de **permutaciones** de **n** elementos, cuando hay **elementos repetidos**, está dado por:

$$P_r^n = \frac{n!}{a! \cdot b! \ldots \cdot r!}$$

- Ejemplo: ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra

MORALEJA?

- (dejer 4 renglones)

4. Variaciones: Se llama variación de n elementos sobre r elementos al número de filas de r objetos que se pueden hacer con n objetos.

A) VARIACIÓN SIMPLE: La variación de n elementos tomados de r en r está dado por:

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo 1: ¿Cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar con las letras de la palabra MARDONES?

Ejemplo2: ¿De cuántas formas se puede elegir un presidente, un secretario y un tesorero dentro de un grupo de 10 personas?

B) VARIACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS: Misma definición anterior, pero en este caso los elementos se pueden repetir

$$V_{r,r}^{n} = n^{k}$$

Ejemplo 1: ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los primeros 6 números naturales?

- Combinaciones: Una combinación es el proceso de encontrar la **cantidad de grupos** que se pueden formar con **n** elementos de modo que cada grupo tenga **r** elementos, **no interesando el orden** de éstos. El número de combinaciones de **n** elementos tomados de **r** en **r** está dado por:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Ejemplo: ¿Cuántos grupos de 3 estudiantes se pueden formar con un total de 10 estudiantes?

Dejar 4 renglones

COMBINACIONES CON ELEMENTOS REPETIDOS: Misma definición anterior, pero en este caso los elementos pueden repetirse.

$$CR_{(n,k)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$$

Ejemplo 1: En una bodega hay 4 tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 de ellas?

Dejar 4 renglones

Llegar hasta acá

EJEMPLO DE CLASE

1) ¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, vicepresidente y tesorero de un club de fútbol sabiendo que hay 12 posibles candidatos?

EJERCICIOS

Identifique y aplique un método de conteo en cada uno de los siguientes numerales.

- 1. ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras impares {1, 3, 5, 7, 9}? ¿Cuántos de ellos son mayores de 70.000?
- 2. Con las cifras 1, 2, 3 ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse?
- 3. A una reunión asisten 11 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?
- 4. ¿Cuántas apuestas de Loto han de realizarse para asegurarse el acierto de los seis resultados de 36 números?
- 5. ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono y cuántos triángulos se pueden formar con sus vértices?
- 6. ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de dos en dos?
- 7. ¿Cuántos partidos distintos se pueden realizar dados cinco equipos de futbol?

- 8. Se tienen 8 libros y solo 4 espacios en una biblioteca. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 4 libros elegidos en los espacios disponibles
- 9. ¿De cuántas maneras pueden repartirse 4 premios diferentes entre un conjunto de 10 personas, suponiendo que cada persona no puede obtener más de un premio?
- 10. ¿Cuántas permutaciones de 3 letras pueden hacerse con las letras de la palabra CENSO?
- 11. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con los dígitos del 1 al 9?